QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ☐ $u_n \geq n$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$. ☐ (u_n) est majorée par 1.

2. On donne $u_n = \dfrac{n+\cos n}{n+1}$.

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$. ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

3. Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si (u_n) prend un nombre fini de valeurs alors (u_n) est convergente.
2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

   Si $(u_n + v_n)$ est convergente alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Si la suite $(u_n{}^2)$ converge vers L, alors on peut affirmer que la suite (u_n) converge vers $\sqrt{L}$ ou vers $-\sqrt{L}$.
4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $\lim\limits_{+\infty} u_n = \lim\limits_{+\infty} v_n$ alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
5. Soit (u_n) une suite réelle telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont convergentes alors (u_n) est convergente.

1 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_n = 2 + \frac{1}{5^n}$, $n \geq 0$ et $v_n = \sqrt{4 + \frac{1}{n}}$, $n \geq 1$.

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

2. Déterminer, à l'aide d'une calculatrice, l'entier n_0 à partir duquel $|u_n - 2| \leq 10^{-6}$.

3. A l'aide d'une calculatrice, déterminer l'entier n_1 à partir duquel on a $|v_n - 2| \leq 10^{-6}$.

2 On considère la suite (a_n) définie par $a_n = \frac{n + (-1)^n}{2n + (-1)^{n+1}}$, $n \geq 0$.

1. Déterminer a_{2n} et a_{2n+1}.

2. En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.

3 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{2^{(-1)^n n}}{(-5)^{n+1}}$, $n \geq 0$.

La suite (u_n) est-elle convergente ?

4 Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{\sqrt{n}}{2n + (-1)^n}$, $n \geq 0$.

5 Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)...\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$.

6 On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) telles que

$x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.33$,

$x_3 = 0.333$, ... , $x_n = 0.\underbrace{333...3}_{\text{n chiffres}}$,

$y_1 = 0.35$, $y_2 = 0.3535$,

$y_3 = 0.353535$,..., $y_n = 0.\underbrace{3535...35}_{\text{n fois 35}}$,

et $z_1 = 0.35$, $z_2 = 0.3355$,

$z_3 = 0.333555$, ..., $z_n = 0.\underbrace{333...3}_{\text{n chiffres}}\underbrace{555...5}_{\text{n chiffres}}$.

1. a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 3 \times \left(10^{-1} + ... + 10^{-n}\right)$.

b. En déduire que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

2. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n$.

7 1. Vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

2. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3, \ n \geq 0. \end{cases}$$

Donner l'expression de u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

8 1. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$, $n \geq 1$.

a. Montrer que pour $n \geq 4$, $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = n^{2n} - (2n)^n$, $n \geq 1$.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

9 On considère les suites (u_n) et (S_n) définies par $u_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k - 1}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2. a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

10 On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{n!}{3^n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que $\frac{w_{n+1}}{w_n} \geq \frac{4}{3}$, $n \geq 3$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

11 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \geq 0$.

1. a. Placer dans un repère orthogonal les points $A_i(i, u_i)$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{8}{9}$, $n \geq 3$.

c. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2. On pose $S_n = \sum\limits_{k=3}^{n} u_k$, $n \geq 3$.

a. Montrer que $S_n \leq 9u_3$.

b. En déduire que la suite (S_n) est convergente.

12 On considère la suite (v_n) définie par $v_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$.

1. Montrer que $v_n \geq \sqrt{n}$, $n \geq 1$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

13 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2. Etudier la convergence des suites u, v et w définies par $u_n = f\left(\frac{1}{3^n}\right)$, $v_n = f(2^n)$ et $w_n = f\left((-0.3)^n\right)$, $n \geq 0$.

14 Dans chacun des cas suivantes, calculer la limite de la suite (u_n).

1. $u_n = \frac{-3}{3^n - 1}$, $n \geq 1$.

2. $u_n = \frac{1}{0.8 + (0.2)^n}$, $n \geq 0$.

3. $u_n = \cos(4n) - 4^n$, $n \geq 0$.

4. $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cos n$, $n \geq 0$.

5. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$, $n \geq 1$.

6. $u_n = \frac{n^2 + \sin n}{n^3}$, $n \geq 1$.

7. $u_n = \frac{n + (-1)^n\sqrt{n}}{3n + 2}$, $n \geq 0$.

8. $u_n = \tan\left(-\frac{\pi n}{2n-1}\right)$, $n \geq 0$.

15 Soit θ un réel appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}]$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2\cos\theta$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, $n \geq 1$.

1. Exprimer u_1 et u_2 en fonction de θ.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

16 On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{E(\pi) + E(2\pi) + \ldots + E(n\pi)}{n^2}$, $n \geq 1$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Montrer que pour $n \geq 1$, $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$.

2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

17 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$.

On se propose d'étudier la limite de la suite (u_n).

1. Soit la suite (v_n) définie par

$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}$, $n \geq 1$.

Montrer que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 \leq n^4$.

3. Montrer que pour tout $x \geq 0$,

$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$.

5. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

18 Soit (u_n) la suite définie par

$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n}\ , n \geq 1. \end{cases}$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq 3$.

2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

19 Soit (u_n) la suite définie par

$\begin{cases} u_0 = a \quad \text{où } a \in]0, \frac{\pi}{2}[, \\ u_{n+1} = \sin(u_n), \ n \geq 0. \end{cases}$

1. Etudier les variations sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $x \mapsto \sin x - x$.

2. En déduire que pour tout réel x de $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \leq x$.

3. Montrer, par récurrence que, pour tout entier n, $u_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

5. En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

20 Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

1. Etudier les variations de f et déterminer $f(]0, +\infty[)$.

2. Représenter la fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

3. On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, montrer que $f(\varphi) = \varphi$.

4. On se propose de construire une suite (x_n) de rationnels qui converge vers φ.

On pose $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$.

a. Calculer et représenter les réels x_1, x_2, x_3 et x_4.

b. Montrer que pour tout entier n, x_n est un rationnel positif.

c. Montrer que $|x_{n+1} - \varphi| \leq \frac{4}{9}|x_n - \varphi|$.

d. Conclure.

21 Soit (u_n) la suite définie par

$u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \geq 1$.

1. a. Calculer u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que (u_n) est croissante.

2. a. Vérifier que pour tout entier naturel $k \geq 2$, on a $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et que $\frac{49}{36} \leq \ell \leq 2$.

3. Soit p un entier naturel tel que $p \geq 3$.

4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$, $n \geq 1$.

a. Montrer que la suite (v_n) est croissante.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $v_n \leq u_n$.

c. En déduire que la suite (v_n) converge vers un réel ℓ' et que $\ell' \leq 2$.

d. On pose $p=3$.

Calculer les trois premiers termes de la suite (v_n).

En déduire un encadrement de ℓ'.

22 Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par

$u_n=\dfrac{1\times3\times5\times...\times(2n-1)}{2\times4\times6\times...\times(2n)}$ et

$v_n=\dfrac{2\times4\times6\times...\times(2n)}{3\times5\times...\times(2n+1)}$, $n\geq1$.

1. a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. En déduire qu'elle converge vers un réel positif ℓ.

2. a. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

b. En déduire qu'elle converge vers un réel positif ℓ'.

3. Soit (w_n) la suite définie par $w_n=u_n.v_n$.

a. La suite (w_n) est-elle convergente ?

b. Déterminer w_n en fonction n.

c. En déduire que $\ell.\ell'=0$.

4. a. Montrer que pour tout $n\geq1$, $u_n<v_n$.

b. En déduire que $\ell=0$.

c. Montrer que pour tout $n\geq1$, $2u_{n+1}>v_n$.

d. En déduire ℓ'.

23 Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x-3}{x}$.

1. Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Soit la suite (u_n) telle que

$$\begin{cases}u_0\in]0,+\infty[,\\ u_{n+1}=\dfrac{4u_n-3}{u_n},\ n\geq0.\end{cases}$$

2. On suppose que $u_0=\dfrac{3}{4}$.

a. Calculer u_1 et représenter u_0 et u_1.

b. La suite (u_n) est-elle définie ?

3. On suppose que $u_0=3$.

a. Représenter u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que la suite (u_n) est constante.

4. On suppose que $u_0=5$.

a. Représenter u_0, u_1, u_2 et u_3.

b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout $n\geq1$, $u_n\geq3$.

c. En déduire que la suite (u_n) converge vers un réel α que l'on déterminera.

d. A l'aide d'une calculatrice, déterminer n_0 pour que $u_n-\alpha\leq10^{-5}$, $n\geq n_0$.

24 Pour chacun des cas suivants, dire si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

1. $u_n=\dfrac{2}{n}$, $v_n=-\dfrac{3}{n}$, $n\geq2$.

2. $u_n=\dfrac{n+2}{n-1}$, $v_n=\dfrac{2n+3}{2n+5}$, $n\geq4$.

3. $u_n=\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $v_n=\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1$, $n\geq2$.

4. $u_n=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{2^k}$, $v_n=2+\dfrac{3}{n}$, $n\geq2$.

5. $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $v_n=\sqrt{n}-\sqrt{n+1}$, $n\geq1$.

25 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0=12$, $v_0=1$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}$,

$v_{n+1}=\dfrac{u_n+3v_n}{4}$, $n\geq0$.

1. Montrer que pour tout $n\geq0$, $u_n\geq v_n$.

2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite α.

3. On pose pour tout $n\geq0$, $t_n=3u_n+8v_n$.

a. Montrer que (t_n) est une suite constante.

b. En déduire la valeur de α.

26 Soit un réel $a>0$ et (b_n) la suite définie pour tout entier non nul n par $b_n=\dfrac{n}{(1+a)^n}$.

1. Montrer que $(1+a)^n \geq \dfrac{n(n-1)a^2}{2}$.

2. En déduire la limite de b_n.

3. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison q telle que $-1<q<1$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n|x_n|=0$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n$.

4. Calculer les limite suivantes

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n+2}$;

$\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

27 1. Montrer que pour tout entier $n>1$ et pour tout réel non nul x de $]-1,1[$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. En déduire que pour tout entier $n>1$ et pour tout réel non nul x de $]-1,1[$,

$\sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}$.

3. Utiliser le résultat précédent pour calculer les limites des suites définies par

$u_n = 1+2\dfrac{5}{3}+\ldots+(n+1)\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$, $n\geq 0$ et

$v_n = 2-2\sqrt{2}+\ldots+2(n+1)\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$, $n\geq 0$.

28 Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$.

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_1 = a+b, \\ u_{n+1} = a+b-\dfrac{ab}{u_n}, \ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que $u_2 = \dfrac{b^3-a^3}{b^2-a^2}$.

2. Montrer que pour tout $n\geq 0$,

$u_{n+1} = \dfrac{b^{n+2}-a^{n+2}}{b^{n+1}-a^{n+1}}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

29 Soit (a_n) la suite définie par

$$\begin{cases} a_0, \\ a_{n+1} = a_n^2 + a_n, \ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que (a_n) est croissante.

2. Montrer que si (a_n) converge, alors sa limite est nécessairement nulle.

3. Montrer que si $a_0>0$, alors (a_n) diverge.

4. Montrer que si $a_0<-1$, alors $a_1>0$.

En déduire que (a_n) diverge.

5. On suppose que $-1<a_0<0$.

a. Montrer que la suite (a_n) est bornée par -1 et 0.

b. En déduire que (a_n) converge et déterminer sa limite.

6. Déterminer la limite de (a_n) lorsque

a. $a_0=0$.

b. $a_0=-1$.

30 Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0.1 \\ u_{n+1} = 1.6u_n(1-u_n), \ n\geq 0. \end{cases}$$

1. Etudier les variations de la fonction $f: x\mapsto 1.6x(1-x)$.

2. Montrer que pour tout $n\geq 0$, $0.1\leq u_n \leq \dfrac{3}{8}$.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.